Propriétés des graphes

À la fin de ce chapitre, je sais :

☞ expliquer le lemme des poignées de mains

☞ caractériser un cycle eulérien

☞ caractériser un graphe connexe, acyclique ou un arbre

A Des degrés et des plans

Théorème 1 — Somme des degrés d'un graphe. Le nombre d'arêtes d'un graphe simple est égale à la moitié de la somme des degrés des sommets de ce graphe.

Plus formellement, soit $G = (S, A)$ un graphe simple alors on a :

$$2|A| = \sum_{s \in S} d(s) \tag{1}$$

Démonstration. Il suffit de dénombrer de deux manières différentes le nombre N d'extrémités d'arêtes dans le graphe G. D'une part, chaque arête possède deux extrémités, on a donc $N = 2|A|$. D'autre part, le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à la somme des degrés de tous les sommets s donc $N = \sum_{s \in S} d(s)$. ■

R On appelle souvent ce théorème le lemme des poignées de mains car il peut se traduire par le fait que dans un graphe il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

Théorème 2 — Formule d'Euler pour les graphes planaires. Soit $G = (S, A)$ un graphe simple. G est planaire si le nombre de régions du plan qu'il délimite R vaut :

$$R = 2 + |A| - |S| \tag{2}$$

R Pour vérifier cette formule, il ne faut pas oublier la région extérieur au graphe qui compte également.

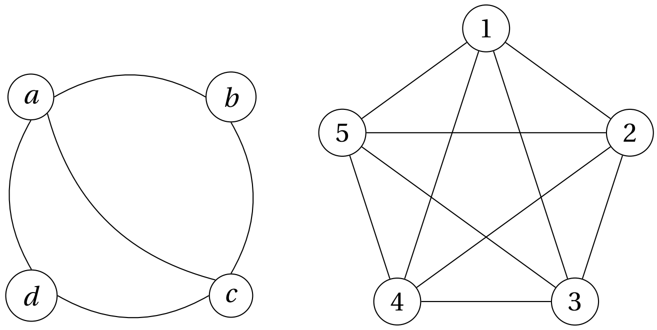

FIGURE 1 – Sur ces graphes, on peut vérifier les théorèmes de caractérisation des chaînes eulériennes et des cycles eulériens

B Caractérisation des chaînes, des cycles et des graphes

Théorème 3 — Caractérisation d'une chaîne eulérienne. Il existe une chaîne eulérienne dans un graphe lorsque seuls les sommets de départ et d'arrivée sont de degré impair.

Théorème 4 — Caractérisation d'un cycle eulérien. Il existe un cycle eulérien dans un graphe si tous les sommets sont de degré pair.

Pour bien visualiser ces caractérisations, on peut s'entraîner sur les graphes de la figure 1. Le graphe d'ordre quatre possède une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien. Le graphe complet K_5 possède les deux.

Théorème 5 — Chaînes extraites et existence de chaînes. S'il existe un parcours d'un sommet a vers un sommet b dans un graphe G alors il existe une chaîne de a vers b dont les arêtes sont des arêtes du parcours.

Par transitivité, s'il existe une chaîne de a à b et une de a à c alors il existe une chaîne de b à c.

On appelle graphe hamiltonien un graphe qui possède un cycle hamiltonien (cf. définition **??**). Un graphe hamiltonien :

- est connexe,
- d'ordre supérieur ou égal à trois,
- n'a pas de sommets de degré un.

Théorème 6 — Condition nécessaire pour un graphe non hamiltonien. Soit $G = (S, A)$ un graphe. Soit $U \subseteq S$ un ensemble de sommets de G. Si le nombre de composantes connexes de $G = (S \setminus U, A)$ est strictement supérieur au nombre de sommets de U, alors G n'est pas hamiltonien.

Théorème 7 — Condition suffisante pour un graphe hamiltonien. Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre supérieur ou égal à deux. Si pour toute paire de sommets a et b non adjacents de G on a :

$$d(a) + d(b) \geqslant |S| \tag{3}$$

alors G est hamiltonien.

Dans le cas d'un **graphe simple** à $n > 2$ sommets, la condition suffisante devient :

$$\forall s \in S, d(s) \geqslant n/2 \tag{4}$$

C Graphes acycliques et connexes

Théorème 8 — Condition nécessaire d'acyclicité d'un graphe. Soit un graphe $G = (S, A)$ possédant au moins une arête et acyclique alors G possède au moins deux sommets de degré un et on a :

$$|A| \leqslant |S| - 1 \tag{5}$$

Théorème 9 — Condition nécessaire de connexité d'un graphe. Si un graphe $G = (S, A)$ est connexe alors on a :

$$|A| \geqslant |S| - 1 \tag{6}$$

R On déduit des deux théorèmes précédents qu'un arbre (cf. définition **??**) possède exactement $|S| - 1$ arêtes.

D Coloration, graphes planaires et nombre chromatique

Théorème 10 — Trois couleurs. Si tous les degrés des sommets d'un graphe planaire sont pairs, alors trois couleurs suffisent pour obtenir une coloration valide.

Théorème 11 — Quatre couleurs. Le nombre chromatique d'un graphe planaire ne dépasse jamais quatre.

On peut chercher à encadrer le nombre chromatique d'un graphe. Dans une premier temps, on peut remarquer que :

- $\chi(G) \leqslant |S|$, autrement dit, l'ordre d'un graphe est supérieur ou égal au nombre chromatique. L'égalité est atteinte pour les graphes complets : tous les sommets étant reliés les uns aux autres, on ne peut qu'utiliser des couleurs différentes pour chaque sommet.
- Pour un sous-graphe G' de G, on a $\chi(G') \leqslant \chi(G)$.

■ **Définition 1 — Degré maximum des sommets d'un graphe.** On note $\Delta(G)$ le degré maximum des sommets d'un graphe G.

■ **Définition 2 — Ordre du plus grand sous-graphe complet d'un graphe.** On note $\omega(G)$ l'ordre du plus grand sous-graphe **complet** d'un graphe G.

Théorème 12 — Encadrement du nombre chromatique. Pour un graphe G, on a :

$$\omega(G) \leqslant \chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1 \tag{7}$$

E Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe

Théorème 13 — Optimalité et plus court chemin dans graphe. Si $a \rightsquigarrow b$ est le plus court chemin passant par un sommet c, alors les sous-chemins $a \rightsquigarrow c$ et $c \rightsquigarrow b$ sont des plus courts chemins.

Démonstration. Soit $a \rightsquigarrow b$ le plus court chemin passant par un sommet c dans un graphe G. Si $a \rightsquigarrow c$ n'est pas le plus court chemin, alors il suffit de prendre le plus court chemin entre a et c et de le joindre à $c \rightsquigarrow b$ pour obtenir un chemin plus court de a vers b. Ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que $a \rightsquigarrow b$ est le plus court chemin. ■